1 Lebesgueův integrál a základy teorie míry

1.1 Lebesgueův integrál

Definice 1 (intervaly v $\mathbb{R}^d$). ***Intervalem*** *v $\mathbb{R}^d$ nazveme množinu tvaru*

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d],$$

uzavřeným intervalem *v $\mathbb{R}^d$ nazveme množinu tvaru*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

otevřeným intervalem *v $\mathbb{R}^d$ nazveme množinu tvaru*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d).$$

Objem intervalu *I (případně uzavřeného, či otevřeného intervalu) definujeme jako*

$$\mathrm{Vol}_d(I) = (b_1 - a1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d) = \prod_{n=1}^{d} (b_n - a_n).$$

Definice 2 (dělení intervalu v $\mathbb{R}^d$). ***Dělením intervalu*** *$I \subset \mathbb{R}^d$ nazveme libovolný konečný systém po dvou disjunktních intrvalů $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}^d$, že*

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Definice 3 (nulová množina v $\mathbb{R}^d$). *Množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ nazveme **nulovou**, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existují intervaly $I_n \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, že*

$$I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_d(I_n) < \varepsilon.$$

Poznámky a příklady.

1. *Každá konečná, či obecněji spočetná, množina je nulová. Množina $\{a\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ je rovněž nulová. Neprázdná otevřená množina naní nikdy nulová.*

2. *Existují i nespočetné nulové podmnožiny $\mathbb{R}$ - Cantorova množina.*

3. *Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina.*

4. *(pro zajímavost) Pro omezenou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$f \in \mathfrak{R}([a, b]) \iff \text{množina bodů nespojitosti } f \text{ je nulová.}$$

5. *(důležitá) U mnoha vztahů funkcí (například $f = g$, nebo $f < g$) budeme říkad, že platí **skoro všude** pokud existuje množina míry 0, že daná vlastnost platí všude mimo tuto množinu. Například předchozí poznámku bychom mohli zformulovat jako*

$$f \in \mathfrak{R}([a, b]) \iff f \text{ je spojitá skoro všude.}$$

Definice 4 (schodovité funkce a jejich integrál)**.** *Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme **schodovitou**, pokud exsituje interval $I \subset \mathbb{R}^d$, jeho dělení $I_1, \ldots, I_n$ a $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, že*

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}.$$

Prostor všech schodovitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ budeme značit H_d. Pro $f \in H_d$ definujeme její integrál jako

$$\int f = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{Vol}_d(A_k).$$